NONLINEAR MATHEMATICAL MODELS DESCRIBING THE INITIAL STAGE OF SARS-COV-2 VIRUS SPREAD

Temur Chilachava President of Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences; Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Sokhumi State University, Professor
E-mail: temo_chilachava@yahoo.com

Linda Khukhua Doctoral Student of Sokhumi State University
E-mail: xuxualinda7@gmail.com

Presented by the I. Vekua Institute of Mathematics at the Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences.

Abstract. The paper discusses new mathematical models that describe the early stages of the spread of the **SARS-CoV-2** virus. The first model considers two groups of people: without healthy immunity and asymptomatic infected. The second model considers three groups of people: without healthy immunity, asymptomatic infected and detected infected.

In the first model, the infectivity variable coefficient is taken as a linear incremental function of two unknown function variables. The first integral has been obtained. The Cauchy's problem is solved analytically exactly. In the second model, in the case of constant infection coefficients, the first two integrals of a three-dimensional dynamic system have been found and the problem is reduced to the Cauchy's problem for one unknown function.

Keywords: *SARS-CoV-2 Virus, Mathematical models, Cauchy's problems.*

Introduction. It is of great interest to predict the extent of the epidemic by creating appropriate mathematical models [1]. Mathematical and computer models of the possible spread of infectious disease, in particular malaria, are discussed in [2].

Since the beginning of 2020, the incurable infectious disease COVID-19 has spread around the world, which has already killed many people and changed the world (economy, development rate, etc.).

Naturally, at this stage, several vaccines have already been developed that have different probabilities (percentages) of acquiring immunity to a given disease, but not complete immunity (100%). In many scientific centers, attempts are being made to create mathematical models for predicting the extent of the spread of this infection.

To predict the scale of the spread of COVID-19 epidemics, the synergistic approach of scientific research of this multifaceted problem has become relevant, one of the initial stages of which is the creation of a mathematical model describing the spread of infection, based on the principle from relatively simple (description of the initial stage) to more complex (accounting for all groups of people) [3]. Building a mathematical model for the spread of the virus SARS-CoV-2 and solving the mathematical problem will allow, taking into account the lockdown and vaccination, to develop a protocol by which the economic losses of the state will be minimized.

§ 1. First mathematical model. Exactly solution of Cauchy's problem.

Consider the first mathematical model (two groups)

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta(S(t), I(t), t)S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta(S, I, t)S(t)I(t) \end{cases}, \tag{1.1}$$

$$S(0) = S_0, \ I(0) = I_0, \tag{1.2}$$

where $S(t)$ is the number of people without healthy immunity at a t time; $I(t)$ is the number of people asymptomatic infected at a t time.

It is natural to assume that the infection rate is an incremental function of two unknown functions

$$\frac{\partial\beta}{\partial S} > 0, \ \frac{\partial\beta}{\partial I} > 0. \tag{1.3}$$

Let us take the infectivity coefficient as a linear function of two unknown functions.

$$\beta(S(t), I(t), t) = a + bS(t) + cI(t). \tag{1.4}$$

That first integral (1.1), (1.2) is written as follows:

$$I(t) + S(t) = const = p = I_0 + S_0. \tag{1.5}$$

According to (1.3), (1.4)

$$b > 0, \ \mathrm{c} > 0. \tag{1.6}$$

The first integral (1.5) put in (1.1), (1.2) and we get the Cauchy's problem:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = [a + bp + (c - b)I](p - I)I \\ I(0) = I_0 \end{cases}. \tag{1.7}$$

Whose exact solution (1.7) will be recorded as follows

$$\frac{(b-c)}{(a+bp)(a+pc)} ln \frac{a+bp+(c-b)I(t)}{a+bp+(c-b)I_0} - \frac{1}{p(a+cp)} ln \frac{p-I(t)}{p-I_0} + \frac{1}{p(a+bp)} ln \frac{I}{I_0} = t,$$

$$\left[\frac{a+bp+(c-b)I(t)}{a+bp+(c-b)I_0}\right]^{\frac{b-c}{(a+bp)(a+pc)}} \left(\frac{p-I_0}{p-I(t)}\right)^{\frac{1}{p(a+pc)}} \cdot \left(\frac{I(t)}{I_0}\right)^{\frac{1}{p(a+bp)}} = e^t. \tag{1.8}$$

Consider special cases

a. $a = 0,\ b = c.$

Then from (1.8), (1.5) we can get an exactly solution

$$I(t) = \frac{pI_0 e^{bp^2 t}}{S_0 + I_0 e^{bp^2 t}},\ S(t) = \frac{pS_0}{S_0 + I_0 e^{bp^2 t}}. \tag{1.9}$$

b. $a \neq 0,\ b = c.$

The exact solution (1.8), (1.5) has the form

$$I(t) = \frac{pI_0 e^{p(a+bp)t}}{S_0 + I_0 e^{p(a+bp)t}},\ S(t) = \frac{pS_0}{S_0 + I_0 e^{p(a+bp)t}}. \tag{1.10}$$

c. $a \neq 0,\ b \neq c,\ a, b, c\ =\ const.$

Consider the case $a = (b - 2c)p.$

Then from (1.8) we get

$$\frac{a + bp + (c-b)I(t)}{a + bp + (c-b)I_0} \cdot \left(\frac{S_0}{S(t)}\right)^2 \frac{I(t)}{I_0} = e^{2(b-c)tp^2}. \tag{1.11}$$

Then from (1.11) for the function I(t) we obtain the quadratic equation

$$\left(c - b - \frac{q_1 q_2 I_0}{{S_0}^2}\right) I^2 + \left(a + bp + \frac{2pq_1 q_2 I_0}{{S_0}^2}\right) I - \frac{q_2 q_1 p^2 I_0}{{S_0}^2} = 0, \tag{1.12}$$

where

$$q_1 \equiv a + bp + (c-b)I_0,\ q_2 \equiv e^{2p^2(b-c)t},\ a + bp = 2p(b-c),$$

$$q_1 = 2p(b-c) - (b-c)I_0 = (b-c)(2p - I_0) = (b-c)(2S_0 + I_0).$$

Consider a particular case of infection rate

$$\beta\big(t, S(t), I(t)\big) = a(t) + b(t)S(t) + c(t)I(t), \tag{1.13}$$

$$b(t) = c(t),\ \beta\big(t, S(t), I(t)\big) = a(t) + b(t)\big(S(t) + I(t)\big) = a(t) + b(t)p. \tag{1.14}$$

Then we get from (1.1), (1.2), (1.5), (1.14)

$$I(t) = \frac{pI_0 e^{p\int_0^t (a(t)+pb(t))dt}}{S_0 + I_0 e^{p\int_0^t (a(t)+pb(t))dt}}, \tag{1.15}$$

$$S(t) = \frac{pS_0}{S_0 + I_0 e^{p\int_0^t (a(t)+pb(t))dt}}.$$

§ 2. Second mathematical model. Exactly solution of Cauchy's problem.

Consider the second mathematical model (three groups)

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta_1(t)S_f(t)S(t) - \beta_4(t)S(t)I(t) \\ \frac{dS_f(t)}{dt} = \beta_2(t)S_f(t)S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta_3(t)S_f(t)S(t) + \beta_4(t)S(t)I(t) \end{cases}, \tag{2.1}$$

$$S(0) = S_0,\ S_f(0) = S_{f_0},\ I(0) = I_0, \tag{2.2}$$

$S(t) -$ is the number of people without healthy immunity at a t time;

$S_f(t) -$ the number of people asymptomatic infected at a t time;

$I(t) -$ the number of people identified infected at a t time.

Consider a particular case

$$\beta_2(t) + \beta_3(t) = \beta_1(t). \tag{2.3}$$

Given the initial stage consideration, it is logical to assume

$$S(0) = S_0,\ S_f(0) = S_{f_0} > 0,\ I(0) = 0. \tag{2.4}$$

Consider the case of constant coefficients

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta_1 S S_f - \beta_4 S I \\ \frac{dS_f}{dt} = \beta_2 S S_f \\ \frac{dI}{dt} = \beta_3 S S_f + \beta_4 S I \end{cases}, \tag{2.5}$$

Adding all three equations of system (2.5), taking into account (2.4), we can obtain its first integral

$$S(t) + S_f(t) + I(t) = S_0 + S_{f_0} = p, \tag{2.6}$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_3.$$

The second first integral when, $\beta_2 \neq \beta_4$ is obtained by considering (2.6)

$$S(t) = p + \frac{1}{\beta_4 - \beta_2}\left[(\beta_1 - \beta_4)S_f + (\beta_2 - \beta_1)S_f^{\frac{\beta_4}{\beta_2}} \cdot S_{f_0}^{\frac{\beta_2 - \beta_4}{\beta_2}}\right]. \tag{2.7}$$

If $\beta_4 = \beta_2$, then

$$S_f = S_{f_0} e^{\frac{\beta_2}{\beta_4 - \beta_1} \cdot \frac{S + S_f - p}{S_f}} = S_{f_0} e^{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \cdot \frac{S + S_f - p}{S_f}} = S_{f_0} e^{\frac{\beta_2}{\beta_3} \cdot \frac{p - S - S_f}{S_f}} = S_{f_0} e^{\frac{\beta_2}{\beta_3} \cdot \frac{I}{S_f}} \tag{2.8}$$

or

$$I(t) = S_f(t) ln\left(\frac{S_f}{S_{f_0}}\right)^{\frac{\beta_3}{\beta_2}} = \frac{\beta_3}{\beta_2} S_f(t) ln\frac{S_f(t)}{S_{f_0}}. \tag{2.9}$$

And $S_f(t)$ function is solution the following Cauchy's problem

$$\begin{cases} \frac{dS_f(t)}{dt} = \beta_2 S_f(t)\left[p - S_f(t) - \frac{\beta_3}{\beta_2} S_f(t) ln\frac{S_f(t)}{S_{f_0}}\right]. \\ S_f(0) = S_{f_0} \end{cases} \tag{2.10}$$

which can be solved by numerical methods.

Thus, when

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_3,\ \beta_4 \neq \beta_2,$$

$$S(t) + S_f(t) + I(t) = S_0 + S_{f_0} = p,$$

$$S(t) = p + \frac{1}{\beta_4 - \beta_2}\left[(\beta_1 - \beta_4)S_f + (\beta_2 - \beta_1)S_f^{\frac{\beta_4}{\beta_2}} \cdot S_{f_0}^{\frac{\beta_2 - \beta_4}{\beta_2}}\right],$$

$$\frac{dS_f}{dt} = \beta_2 \left\{ p + \frac{1}{\beta_4 - \beta_2} \left[(\beta_1 - \beta_4) S_f + (\beta_2 - \beta_1) S_f^{\frac{\beta_4}{\beta_2}} \cdot S_{f_0}^{\frac{\beta_2 - \beta_4}{\beta_2}} \right] \right\} S_f, \qquad (2.11)$$

$$S_f(0) = S_{f_0} > 0.$$

The Cauchy's problem (2.11) is solved by numerical methods, then we find the sequence $S(t)$ and $I(t)$.

When $\beta_4 = \beta_2$, then from (2.10) we find $S_f(t)$), from (2.9) $I(t)$ and from (2.6) $S(t)$.

Conclusion. New mathematical models considered that describe the early stages of the spread of **SARS-CoV-2 Virus**. In the first model, two groups of people are considered: those without healthy immunity; asymptomatic infected. In the second model, three groups of people are considered: those without healthy immunity; asymptomatic infected; identified infected.

In the first model, the infectivity variable coefficient is taken as a linear incremental function of two unknown function variables. The first integral is obtained. Cauchy's problem is solved exactly. In the second model, in the case of constant infection coefficients, the first two integrals of a three-dimensional dynamic system are found and the problem is reduced to the Cauchy's problem for one unknown function.

References:

1. Bailey N. T. J., The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications. Second edition. Hafner Press [Macmillan Publishing Co., Inc.] New York, 1975.
2. Chilachava T., Kh. Geladze and Ts. Dzidziguri, The nonlinear mathematical model of spreading of malaria (on an example of Gali region). Proceedings of the Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences 1 2011, 317–324.
3. Chilachava T., L. Khukhua Nonlinear Mathematical Models Describing the Initial Stage of Infection Spread. XI International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, August 23–28, 2021, p. 83.

SARS-CoV-2 ვირუსის გავრცელების საწყისი სტადიის აღმწერი არაწრფივი მათემატიკური მოდელები

თემურ ჩილაჩავა ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

E-mail: temo_chilachava@yahoo.com

ლინდა ხუხუა სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დოქტორანტი

E-mail: xuxualinda7@gmail.com

წარმოადგინა ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის ილია ვეკუას სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტმა

აბსტრაქტი. ეპიდემიის გავრცელების მასშტაბების პროგნოზირებისათვის დიდად მნიშვნელოვანია შესაბამისი მათემატიკური მოდელების შექმნა. ინფექციური დაავადების, კერძოდ, მალარიის შესაძლო გავრცელების, პროგნოზირების მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელები განხილულია 2011 წელს თ. ჩილაჩავას. ხ. გელაძის, ც. ძიძიგურის ნაშრომებში. 2020 წლის დასაწყისიდან მსოფლიოში გავრცელდა ვერაგი ინფექციური დაავადება COVID – 19, რომელმაც უკვე ბევრი ადამიანი შეიწირა და შეცვალა მსოფლიო (ეკონომიკა, განვითარების ტემპი და ა.შ.).

ბუნებრივია, რომ ამ ეტაპზე უკვე შექმნილია რამდენიმე ვაქცინა, რომელთაც აქვთ მოცემული დაავადების მიმართ იმუნიტეტის შეძენის სხვადასხვა ალბათობა (პროცენტები), მაგრამ არა სრული იმუნიტეტი (100%). ბევრ სამეცნიერო ცენტრში ცდილობენ შექმნან ამ ინფექციის გავრცელების მასშტაბების პროგნოზირების მათემატიკური მოდელები.

ნაშრომში განხილულია ახალი მათემატიკური მოდელები, რომლებიც აღწერენ გარკვეული ინფექციური დაავადებების, მათ შორის, COVID–19, გავრცელების ადრეულ სტადიას. პირველ მოდელში, განხილულია ადამიანების

ორი ჯგუფი: ჯანმრთელი იმუნიტეტის არმქონე; უსიმპტომო ინფიცირებულები. მეორე მოდელში, განხილულია ადამიანების სამი ჯგუფი: ჯანმრთელი იმუნიტეტის არმქონე; უსიმპტომო ინფიცირებულები; გამოვლენილი ინფიცირებულები.

პირველ მოდელში, დაინფიცირების ცვლადი კოეფიციენტი აღებულია, როგორც უცნობი ორი ფუნქციის ცვლადის წრფივი ზრდადი ფუნქცია. მიღებულია პირველი ინტეგრალი. კოშის ამოცანა ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად.

მეორე მოდელში, დაინფიცირების მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში, ნაპოვნია სამგანზომილებიანი დინამიკური სისტემის ორი პირველი ინტეგრალი და ამოცანა დაყვანილია კოშის ამოცანამდე ერთი უცნობი ფუნქციისათვის.